Bab VI

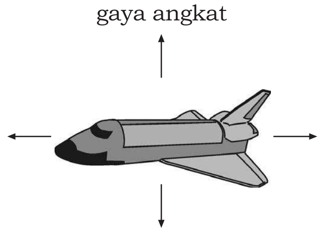
Vektor

Sumber: *www.staralliance.com*

Pesawat Terbang

Terbayangkah kalian dengan teknologi pesawat terbang? Alat transportasi ini diciptakan dengan teknologi yang canggih. Salah satunya adalah saat merancang konstruksi pesawat terbang.

Konstruksi sebuah pesawat terbang telah dirancang sedemikian rupa sehingga ketika mengudara pesawat tetap berada dalam posisi stabil. Selain konstruksi yang memerlukan perhitungan mendetail, kapasitas muatan pesawat juga perlu dilakukan pembatasan. Hal ini bertujuan untuk menstabilkan kondisi pesawat sehingga berat yang harus ditumpu oleh pesawat dapat seimbang. Di dalam ilmu fisika, pada sebuah pesawat terbang yang sedang mengudara bekerja empat buah macam gaya dengan besar dan arah yang berbeda-beda. Diagram gaya yang bekerja pada pesawat digambarkan sebagai berikut.



Perhatikan keempat gaya yang bekerja pada pesawat tersebut. Gaya angkat memiliki arah ke atas, gaya hambat memiliki arah ke kanan (belakang), gaya dorong memiliki arah ke kiri (depan) dan gaya berat memiliki arah ke bawah. Tiap-tiap gaya memiliki besaran dalam sebuah satuan Newton. Besaran yang memiliki arah disebut vektor. Lebih lanjut mengenai vektor akan kita pelajari pada uraian bab berikut.

Kegiatan Belajar 1

Vektor pada Bidang Datar

Sumber: www.southpolestation.com

Salah satu kapal pengangkut minyak yang mengalami kebocoran

Sarana transportasi darat, laut, maupun udara masing-masing memiliki peluang yang sama untuk terjadinya kecelakaan. Apabila kecelakaan terjadi di tengah lautan lepas tentunya kapal yang mengalami kerusakan harus dibawa ke pelabuhan terdekat untuk segera diperbaiki. Untuk menarik kapal tersebut dibutuhkan dua buah kapal dengan dilengkapi kawat baja. Agar kapal dapat sampai ke pelabuhan yang dituju dan posisi kapal selama perjalanan tetap stabil, besar gaya yang dibutuhkan oleh masing-masing kapal penarik dan sudut yang dibentuk oleh kawat baja harus diperhitungkan dengan cermat. Dari kedua gaya dan sudut yang dibentuk oleh kapal penarik dapat kita hitung besarnya resultan gaya yang bekerja. Untuk menghitung resultan gaya terlebih dahulu kita pelajari uraian berikut.

Uraian Materi

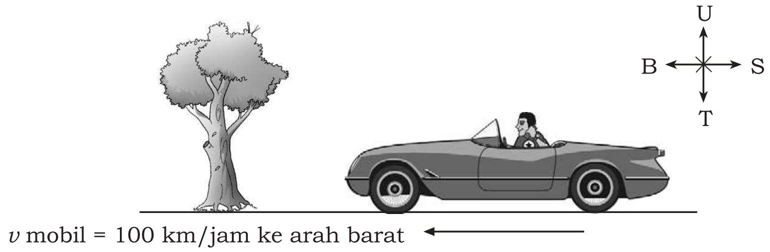
A. Vektor dan Notasinya

Apabila kita memindahkan atau menggeser sebuah benda (materi) yang berbentuk apa saja, maka perpindahan benda itu akan memenuhi dua unsur yaitu seberapa jauh kepindahannya dan ke arah mana benda itu berpindah. Kedua unsur yang memengaruhi perpindahan benda itu disebut sebagai besaran ***vektor***.

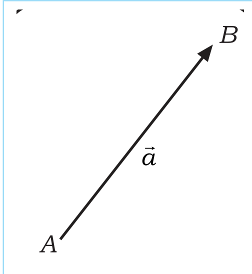
Jadi, **vektor** adalah besaran yang selain mempunyai nilai kuantitatif (besar) juga mempunyai arah, misalnya besaran kecepatan, gaya, dan momen. Secara grafis, vektor dilambangkan dengan arah panah.

Contoh:

Sebuah mobil melaju dengan kecepatan 100 km/jam ke arah barat. Peristiwa tersebut merupakan salah satu bentuk penggunaan vektor dalam kehidupan sehari-hari. Vektor yang digunakan mempunyai besar 100 km/jam dan melaju ke arah barat.



Secara geometris, vektor dapat disajikan dengan ruas garis berarah. Panjang ruas garis menyatakan besar vektor dan anak panah menyatakan arah vektor. Gambar di samping menunjukkan vektor $\overrightarrow{AB}$, dengan A adalah **titik pangkal** vektor $\overrightarrow{AB}$ dan B adalah **titik ujung** (terminal) dari vektor $\overrightarrow{AB}$. Vektor $\overrightarrow{AB}$ dapat ditulis sebagai vektor $\vec{a}$ (huruf kecil bergaris panah atas).



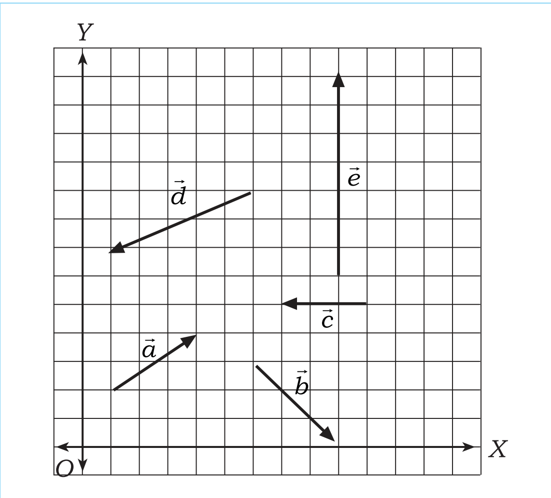
B. Vektor pada Bangun Datar R^2 (Ruang Dimensi Dua)

Vektor dimensi dua adalah vektor yang mempunyai dua unsur yaitu unsur vertikal (sumbu Y) dan horizontal (sumbu X). Vektor pada bidang datar (dimensi dua) ditandai dengan sumbu X dan sumbu Y, yang saling berpotongan di titik pusat O (0, 0). Secara analitis vektor dimensi dua dapat disajikan menurut unsur-unsurnya yaitu:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ atau } \vec{a} = (x, y)$$

Dengan x adalah unsur mendatar. Apabila $x > 0$ (positif) maka x mempunyai arah ke kanan dan apabila $x < 0$ (negatif) x mempunyai arah ke kiri. Selanjutnya y adalah unsur vertikal. Apabila $y > 0$ (positif) maka arahnya ke atas dan jika $y < 0$ (negatif) arahnya ke bawah.

Perhatikan beberapa contoh berikut.



$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{d} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

Info

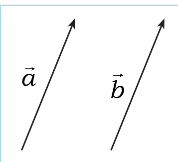
Sumber: *www.motograndprix.com*

Motor balap

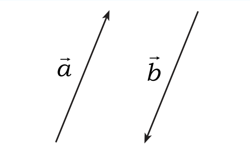
Contoh lain penggunaan vektor adalah pada transformasi, kecepatan, medan elektrik, momentum, tenaga, dan percepatan. Besaran vektor juga berlaku pada gaya gravitasi dengan arah ke pusat bumi sebagai arah positif.

C. Ruang Lingkup Vektor

1. Kesamaan Dua Vektor



Dua buah vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ dikatakan sama apabila keduanya mempunyai besar (panjang) dan arah yang sama. Perhatikan gambar di samping. Terlihat $\vec{\boldsymbol{a}}$ sejajar $\vec{\boldsymbol{b}}$ dan besarnya sama. Diperoleh $\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{b}}$.



2. Vektor Negatif

Vektor negatif dari $\vec{a}$ adalah vektor yang besarnya sama dengan vektor $\vec{a}$, tetapi arahnya berlawanan dan ditulis $-\vec{a}$. Perhatikan gambar di samping. Vektor $\vec{a}$ sejajar dan sama panjang dengan vektor $\vec{b}$. Karena arah vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ saling berlawanan maka $\vec{a} = -\vec{b}$.

3. Vektor Nol

Vektor nol adalah vektor yang besar/panjangnya nol dan arahnya tak tentu. Pada sistem koordinat cartesius vektor nol digambarkan berupa titik. Di ruang dimensi dua vektor nol dilambangkan dengan $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

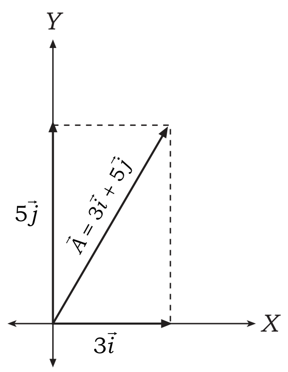
Perlu Tahu

Vektor posisi $\vec{A} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ pada dimensi 2 dapat dinyatakan dengan $\vec{A} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{i} + y\vec{j}$

4. Vektor Posisi

Vektor posisi adalah vektor yang titik pangkalnya terletak pada pusat koordinat O (0,0) dan titik ujungnya berada pada koordinat lain. Vektor posisi pada R^2 dari titik A (x, y) dinyatakan sebagai kombinasi linear vektor satuan sebagai berikut.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{i} + y\vec{j}$$



Penulisan vektor $\vec{i}$ dan $\vec{j}$ menyatakan vektor satuan pada sistem koordinat. Vektor satuan $\vec{i}$ adalah vektor yang searah dengan sumbu X positif dan besarnya 1 satuan. Vektor satuan $\vec{j}$ adalah vektor yang searah dengan sumbu Y dan besarnya 1 satuan.

Contoh:

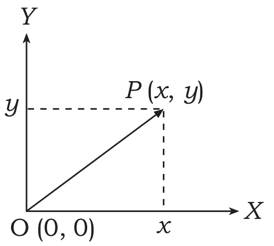
Nyatakan vektor $\vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ dalam bentuk kombinasi linear vektor satuan dan tentukan panjangnya!

Penyelesaian:

Kombinasi linear vektor $\vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ adalah $3\vec{i} + 5\vec{j}$.

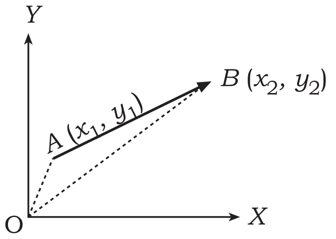
$$\begin{aligned} |A| &= \sqrt{3^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{9 + 25} \\ &= \sqrt{34} \end{aligned}$$

Jadi, panjang vektor A adalah $\sqrt{34}$ satuan.



Vektor yang ditarik dari titik pangkal O ke titik P disebut juga vektor posisi titik P dan dituliskan $\overrightarrow{OP}$. Jika koordinat titik P adalah (x, y) maka vektor posisinya adalah $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Jika koordinat titik A (x_1, y_1) dan titik B (x_2, y_2) maka $\overrightarrow{AB}$ dapat dinyatakan sebagai vektor posisi sebagai berikut.



$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ &= \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Contoh:

1. Diberikan koordinat titik P (2, –3) dan Q (7, 1). Nyatakan kedua koordinat titik tersebut sebagai vektor posisi $\overline{PQ}$ dan $\overline{QP}$!

   Penyelesaian;

   a. $\overline{PQ} = \overline{OQ} - \overline{OP}$

   $$= \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-2 \\ 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   b. $\overline{QP} = \overline{OP} - \overline{OQ}$

   $$= \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-7 \\ -3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

   Perhatikan bahwa $\overline{PQ}$ dan $\overline{QP}$ memiliki besar yang sama dan berlawanan arah.

   Vektor $\overline{AB}$ merupakan vektor posisi, yaitu vektor yang menunjukkan posisi vektor $\overline{AB}$ pada koordinat cartesius. Posisi vektor $\overline{AB}$ dengan komposisi $A = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ dapat ditulis dengan koordinat kutub sebagai berikut.

   $$\overline{AB} = (r \angle \theta)$$

   $$\text{dengan } r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

   $$\tan \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

   Bentuk $\overline{AB} = (r \angle \theta)$ disebut juga resultan vektor $\overline{AB}$.

> **Perlu Tahu**
>
> Vektor dalam bentuk koordinat cartesius maupun koordinat kutub dapat dicari resultan dan besar sudut yang diapit.

2. Diberikan dua buah vektor yang masing-masing besarnya 4 kN dan 3 kN. Tentukan besarnya vektor resultan kedua vektor beserta arahnya!

   Penyelesaian:

   $$r = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

   $$\tan \alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

   $\Leftrightarrow \quad \alpha = 36°52'$

   Jadi, vektor resultan beserta arahnya adalah (5 $\angle$ 36°52')

5. Modulus atau Besar Vektor

Modulus menyatakan panjang atau besar vektor. Karena panjang atau besar vektor selalu bernilai positif maka cara menulis modulus menggunakan tanda mutlak $(|\ .\ |)$. Jika diketahui koordinat titik $P(x, y)$ maka panjang vektor posisi $\overline{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dirumuskan sebagai berikut.

$$|\overline{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Diketahui titik A (x_1, y_1) dan B (x_2, y_2). Secara analitis, diperoleh komponen vektor $\overline{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$.

Panjang vektor $\overline{AB}$ dapat dirumuskan:

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Contoh:

Diketahui titik A (3 , –5) dan B (–2 , 7), tentukan hasil operasi vektor tersebut!

a. Komponen vektor $\overline{AB}$

b. Modulus/besar vektor $\overline{AB}$

Penyelesaian:

a. Komponen vektor $\overline{AB} = \begin{pmatrix} -2-3 \\ 7-(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$

b. Besar vektor $\overline{AB} = \sqrt{(-5)^2 + 12^2}$

$= \sqrt{25+144} = \sqrt{169}$

$= 13$

6. Vektor Satuan

Vektor satuan adalah vektor yang mempunyai panjang (besar) 1 satuan. Vektor satuan dapat ditentukan dengan cara **membagi vektor tersebut dengan besar (panjang) vektor** semula.

Vektor satuan dari vektor $\vec{a}$ dirumuskan $\vec{e} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

Contoh:

Diketahui vektor $\vec{a}$ = (–3 , 2). Hitunglah vektor satuan dari vektor $\vec{a}$!

Penyelesaian:

Besar vektor $\vec{a} = |\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

Diperoleh vektor satuan dari $\vec{a}$ adalah $\vec{e} = \dfrac{(-3,2)}{\sqrt{13}} = \left(\dfrac{-3}{\sqrt{13}}, \dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)$ atau dapat dituliskan dalam bentuk vektor kolom $\vec{e} = \begin{pmatrix} \dfrac{-3}{\sqrt{13}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$.

Untuk membuktikan bahwa jawaban tersebut benar dapat kita cek kembali menurut definisi panjang vektor $\vec{e} = \sqrt{\left(\dfrac{-3}{\sqrt{13}}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)^2}$ $= \sqrt{\dfrac{9}{13} + \dfrac{4}{13}} = \sqrt{\dfrac{13}{13}} = \sqrt{1} = 1.$

Karena modulus $\vec{e}$ adalah 1, terbukti bahwa $\vec{e} = \sqrt{\dfrac{-3}{\sqrt{13}}, \dfrac{2}{\sqrt{13}}}$ adalah vektor satuan dari $\vec{e}$ = (–3, 2).

Aplikasi

Di dalam sebuah rangkaian listrik arus bolak-balik terdapat tiga buah komponen penting yaitu L = induktor, C = kapasitor, dan R = resistor. Kombinasi vektor dari resistor dengan reaktansi di dalam L disebut impedansi yang dilambangkan dengan z dan memiliki satuan ohm (Ω).

Diberikan impedansi dari rangkaian seri yang dinyatakan sebagai berikut.

$z = 6 + \vec{j}\,.\,8$ ohm

Tentukan vektor impedansi tersebut dalam koordinat kutub.

Penyelesaian:

Vektor impedansi dari z ekuivalen dengan mencari modulus dari z.

$$
\begin{aligned}
|z| &= \sqrt{6^2 + 8^2} \\
&= \sqrt{36 + 64} \\
&= \sqrt{100} \\
&= 10
\end{aligned}
$$

Sudut yang dibentuk vektor z sebagai berikut.

$$\tan \mu = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = 1{,}333$$

$\Leftrightarrow \quad \mu = 53{,}1$

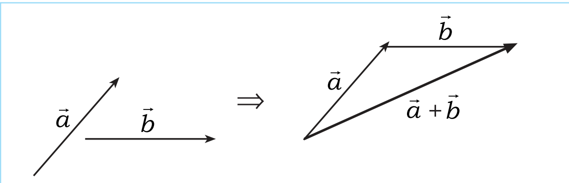
Jadi, koordinat kutub dari vektor impedansi z adalah $(10 \angle 53{,}1°)$.

D. Operasi Hitung Vektor di R^2

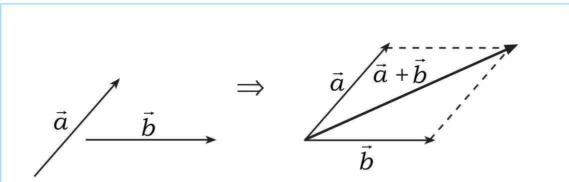
1. Penjumlahan Dua Vektor

Secara geometris penjumlahan dua vektor ada 2 aturan, yaitu:

a. Aturan segitiga



b. Aturan jajaran genjang



Secara analitis penjumlahan dua vektor dirumuskan sebagai berikut.

Jika vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ dan vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ maka $\boxed{\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}}$

Contoh:

Jika vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ dan vektor $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ maka $\vec{c} + \vec{d} = \begin{pmatrix} 8+3 \\ 4+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \end{pmatrix}$

2. Selisih Dua Vektor

Selisih dua vektor artinya menjumlahkan vektor pertama dengan lawan (negatif) vektor kedua.

$$\boxed{\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})}$$

Perlu Tahu

Pada penjumlahan vektor berlaku:

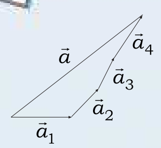
1. Sifat komutatif

   $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

2. Sifat asosiatif

   $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

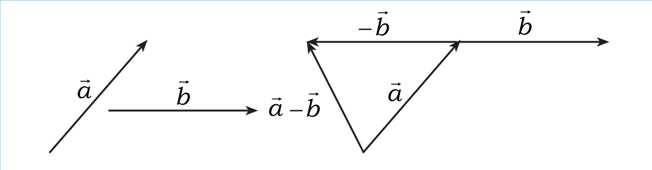
Info



Penjumlahan vektor dapat dilakukan dengan cara potigon yaitu tidak perlu tergantung pada urutannya. Pada gambar di atas diperoleh:

$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4$

Secara geometris dapat digambarkan sebagai berikut.



Secara analitis jika diketahui vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ dan vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ maka

$$\vec{a}-\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$$

Contoh:

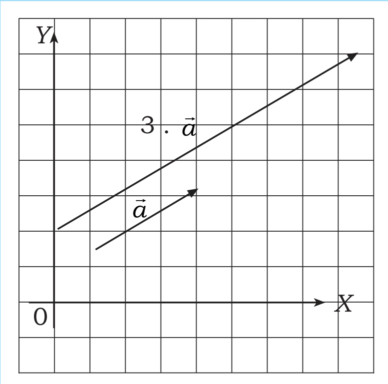
Jika vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ dan vektor $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ maka $\vec{c} - \vec{d} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-3 \\ 4-9 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$

3. Perkalian Vektor

a. Perkalian Vektor dengan Skalar

Hasil kali vektor $\vec{a}$ dengan skalar k adalah **vektor yang panjangnya k kali panjang vektor $\vec{a}$ dan arahnya bergantung dengan nilai k.**



Info

Apabila titik–titik dalam vektor dapat dinyatakan sebagai perkalian vektor yang lain, titik-titik itu disebut titik-titik kolinear (segaris).

Perlu Tahu

Sifat-sifat perkalian vektor.
Jika a suatu vektor tak nol dan n, $p \in \mathbb{R}$ maka berlaku:
1. $n\vec{a} = |n|\ |\vec{a}|$
2. $n(-\vec{a}) = -n\vec{a}$
3. $n\vec{a} = \vec{a}n$
4. $(np)\vec{a} = n(p\vec{a})$
5. $(n+p)\vec{a} = n\vec{a} + p\vec{a}$
6. $n(\vec{a}+\vec{b}) = n\vec{a} + n\vec{b}$

Jika vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ maka $k \,.\, \vec{a} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \end{pmatrix}$

Ada 3 kemungkinan hasil kali suatu vektor dengan skalar k sebagai berikut.

1. Jika $k > 0$ maka $k \,.\, \vec{a}$ adalah suatu vektor yang panjangnya k kali vektor $\vec{a}$ dan searah dengan $\vec{a}$.
2. Jika $k = 0$ maka $k \,.\, \vec{a}$ adalah vektor nol.
3. Jika $k < 0$ maka $k \,.\, \vec{a}$ adalah suatu vektor yang panjangnya k kali vektor $\vec{a}$ dan berlawanan arah dengan $\vec{a}$.

Contoh:

Diketahui vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$. Tentukan hasil operasi vektor berikut!

a. $3 \,.\, \vec{a}$ b. $-2 \,.\, \vec{a}$ c. $\frac{1}{2} \,.\, \vec{a}$

Penyelesaian:

a. $3 \cdot \vec{a} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot (-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -24 \end{pmatrix}$

b. $-2 \cdot \vec{a} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 4 \\ -2 \cdot (-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 16 \end{pmatrix}$

c. $\frac{1}{2} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 4 \\ \frac{1}{2} \cdot (-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

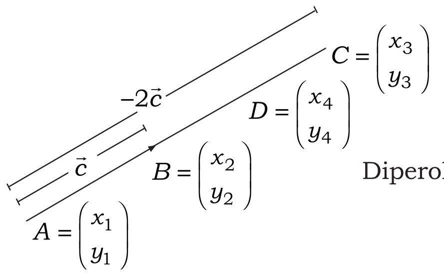
Kilas Balik

Skalar adalah besaran yang hanya mempunyai nilai dan tidak mempunyai arah. Contoh: panjang, lebar, arus listrik, volume, jarak, dan suhu.

b. Vektor Segaris (Kolinear)

Perkalian suatu vektor $\vec{c}$ dengan skalar k menghasilkan sebuah vektor baru yang panjangnya k kali vektor $\vec{c}$. Misalnya vektor $\vec{c}$ dapat dinyatakan sebagai vektor $\overrightarrow{AB}$ dengan $A = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Dengan demikian $k \cdot \vec{c} = k \cdot \overrightarrow{AB} = k\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$. Apabila diberikan ketentuan bahwa titik pangkal vektor $\vec{c}$ dan vektor $k \cdot \vec{c}$ saling berimpit, diperoleh titik pangkal vektor $k \cdot \vec{c}$ adalah $A = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$. Untuk jelasnya perhatikan gambar berikut.



Diperoleh bahwa $\overrightarrow{AC} = 2 \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{BC}$

Selanjutnya, diambil sembarang titik $D = \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix}$ yang terletak pada vektor $\overrightarrow{AC}$. Titik A, B, dan D dikatakan segaris apabila vektor yang dibangun oleh dua titik di antaranya dapat dinyatakan sebagai perkalian vektor dua titik yang lain.

Contoh:

1. Diberikan tiga buah titik $A = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   Tunjukkan bahwa titik A, B, dan C segaris!

   Penyelesaian:

   $$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 \\ 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \ldots (1)$$

   $$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+2 \\ 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \ldots (2)$$

   Dari bentuk (1) dan (2) dapat dilihat bahwa $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$. Dengan demikian terbukti bahwa titik A, B, dan C segaris.

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \ldots (3)$$

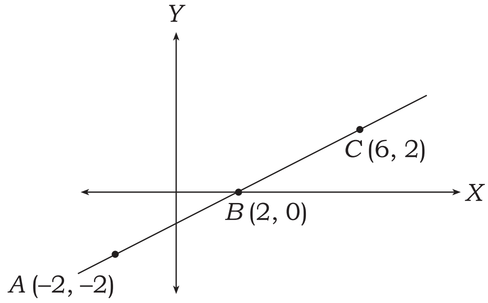
$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \ldots (4)$$

Dari bentuk (3) dan (4) dapat dilihat bahwa $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{BC}$. Dengan demikian terbukti bahwa titik A, B, dan C segaris.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \ldots (5)$$

$$\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \ldots (6)$$

Dari bentuk (5) dan (6) dapat dilihat bahwa $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{AB}$. Dengan demikian terbukti bahwa A, B, dan C segaris.
Secara gambar dapat ditunjukkan bahwa titik A, B, dan C segaris.



c. Perkalian Vektor

Operasi perkalian pada vektor dapat dikerjakan melalui dua cara sebagai berikut.

1) Sudut Antara Kedua Vektor Tidak Diketahui

Diberikan vektor $\vec{a} = (a_1, a_2)$ dan $\vec{b} = (b_1, b_2)$. Hasil kali kedua vektor dirumuskan sebagai berikut.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Contoh:

Diberikan vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ dan $\vec{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Tentukan hasil kali vektor $\vec{p}$ dan $\vec{q}$!

Penyelesaian:

Diketahui $\vec{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow p_1 = 5$ dan $p_2 = 7$

$\vec{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow q_1 = 3$ dan $q_2 = -2$

$$\begin{aligned} \vec{p} \cdot \vec{q} &= p_1 q_1 + p_2 q_2 \\ &= 5 \,.\, 3 + 7\,(-2) \\ &= 15 + (-14) \\ &= 1 \end{aligned}$$

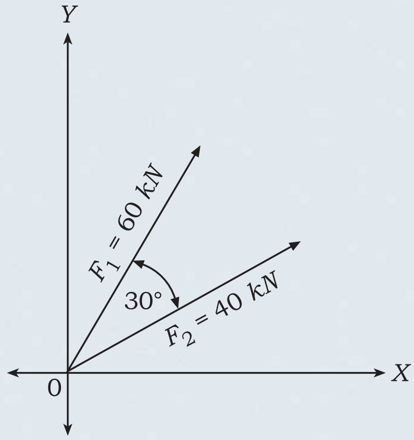
Jadi, hasil kali vektor $\vec{p}$ dan $\vec{q}$ adalah 1.

Perlu Tahu

Hasil perkalian dua buah vektor menghasilkan besaran skalar.

Aplikasi

Dua buah gaya bekerja masing-masing 40 kN dan 60 kN. Kedua gaya tersebut membentuk sudut apit seperti pada gambar di samping. Tentukan hasil kali kedua gaya tersebut!



Penyelesaian:

$F_1 \cdot F_2 = (40) \cdot (60) \cdot \cos 30°$

$= 2.400 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$= 1.200\sqrt{3}$

Jadi, hasil kali kedua gaya adalah $1.200\sqrt{3}$ kN.

2) Sudut Antara Kedua Vektor Diketahui

Diberikan vektor $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$, dan sudut yang dibentuk oleh vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ adalah α. Perkalian antara vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ dirumuskan sebagai berikut.

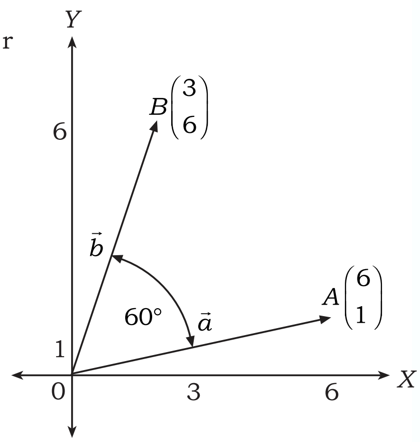
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \alpha$$

Contoh:

Tentukan hasil kali kedua vektor pada gambar di bawah ini!

Penyelesaian:

Diketahui dua buah vektor sebagai berikut.



$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow a_1 = 6$ dan $a_2 = 1$

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{6^2 + 1^2}$

$= \sqrt{36 + 1} = \sqrt{37}$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \rightarrow b_1 = 3$ dan $b_2 = 6$

$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = \sqrt{3^2 + 6^2}$

$= \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \alpha$

$= \sqrt{37} \cdot \sqrt{45} \cdot \cos 60°$

$= \sqrt{37} \cdot \sqrt{45} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{3}{2}\sqrt{185}$

Jadi, hasil kali kedua vektor adalah $\frac{3}{2}\sqrt{185}$.

Sementara itu, dari dua buah vektor pada sistem koordinat cartesius dapat kita cari besar sudut yang dibentuk oleh kedua vektor yang dirumuskan sebagai berikut.

$$\cos\alpha = \frac{a_1b_1+a_2b_2}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

Contoh:

Tentukan besar sudut yang dibentuk oleh vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ dan $\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$!

Penyelesaian:

$\vec{u} = \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix} \to u_1 = 6$ dan $u_2 = 2$

$\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \to v_1 = 3$ dan $v_2 = 4$

$$\cos\alpha = \frac{u_1v_1+u_2v_2}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{6\cdot3+2\cdot4}{\left(\sqrt{6^2+2^2}\right)\left(\sqrt{3^2+4^2}\right)} = \frac{18+8}{\left(\sqrt{40}\right)\left(\sqrt{25}\right)}$$

$$= \frac{26}{10\sqrt{10}} = \frac{26}{13{,}62} = 0{,}822$$

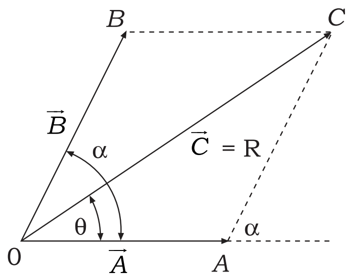
$\Leftrightarrow \quad \alpha = \text{arc } \cos\,(0{,}822) = 34{,}71°$

Jadi, sudut yang dibentuk oleh vektor u_1 dan v_2 sebesar 34,71°.

E. Besar dan Arah Vektor Resultan

1. Resultan Dua Buah Vektor

Perhatikan gambar di samping. Diberikan dua buah vektor yaitu vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ serta sudut yang dibentuk oleh vektor $\vec{B}$ terhadap vektor $\vec{A}$ yaitu sebesar α. Resultan dari vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ adalah sama dengan mencari panjang *OC*. Menggunakan aturan segitiga, panjang *OC* dapat kita cari dengan cara sebagai berikut.



$$\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AC}^2 + 2\left(\overline{OA}\right)\left(\overline{AC}\right)\cos\alpha$$

Dengan demikian resultan dua buah vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ adalah:

$$\overline{OC} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{AC}^2 + 2\left(\overline{OA}\right)\left(\overline{AC}\right)\cos\alpha}$$

atau

$$R = \sqrt{\vec{A}^2 + \vec{B}^2 + 2\overline{AB}\cos\alpha}$$

Rumus di atas adalah rumus untuk mencari resultan dua buah vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ yang membentuk sudut α. Selanjutnya, apabila resultan dari vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ yaitu vektor $\vec{R}$ membentuk sudut θ terhadap vektor $\vec{A}$ maka arah dari vektor resultan R dapat dicari dengan rumus sebagai berikut.

$$\sin\theta = \frac{B\sin\alpha}{R}$$

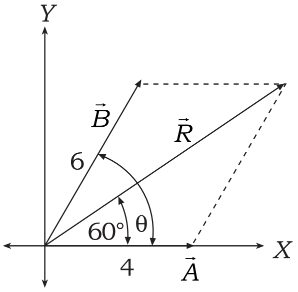
Contoh:

Diberikan dua buah vektor yaitu $\vec{A}$ dengan panjang 4 satuan dan vektor $\vec{B}$ dengan panjang 6 satuan. Vektor $\vec{A}$ dan vektor $\vec{B}$ membentuk sudut 60°. Tentukan besar dan arah vektor resultannya!

Penyelesaian:

Vektor resultan R diperoleh dengan menggunakan rumus berikut.

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{\vec{A}^2 + \vec{B}^2 + 2\overline{AB}\cos\alpha} \\ &= \sqrt{4^2 + 6^2 + 2\cdot 4\cdot 6\cdot(\cos 60°)} \\ &= \sqrt{16 + 36 + 48\cdot\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{16+36+24} \\ &= \sqrt{76} \end{aligned}$$



Jadi, besar vektor resultan adalah $\sqrt{76}$ satuan.
Selanjutnya besar sudut θ diberikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{B\sin\alpha}{R} \\ &= \frac{6\cdot\sin 60^o}{\sqrt{76}} \\ &= \frac{6\cdot(\frac{1}{2}\sqrt{3})}{\sqrt{76}} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{76}}\times\frac{\sqrt{76}}{\sqrt{76}} \\ &= \frac{3\cdot 2\sqrt{57}}{76} \\ &= \frac{3\sqrt{57}}{38} \end{aligned}$$

Dengan demikian $\theta = \text{arc}\sin\frac{3\sqrt{57}}{38}$

$\Leftrightarrow \theta = 36{,}87°$

Jadi, arah resultan vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ adalah 36,87°.

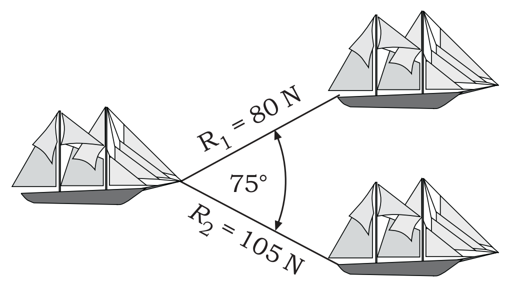
Kilas Balik

Pada bab 1 telah dipelajari tentang trigonometri antara lain $\sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Aplikasi

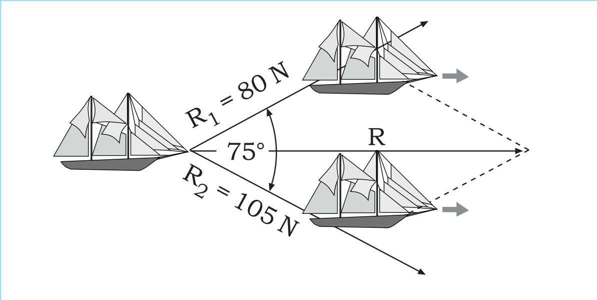
Sebuah kapal mengalami kemacetan di tengah laut. Untuk membawa kapal tersebut kembali ke pelabuhan dibutuhkan dua buah kapal penarik. Gaya yang dibutuhkan kedua kapal serta sudut yang dibentuk tampak pada gambar di samping.

Tentukan besarnya resultan gaya yang dihasilkan oleh kedua kapal!



Penyelesaian:

Resultan gaya kedua kapal digambarkan pada diagram gaya di samping.



Resultan gaya kedua kapal diberikan sebagai berikut.

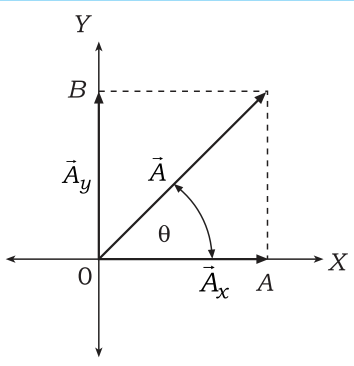
$$\begin{aligned} R &= \sqrt{R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2 \cos\alpha} \\ &= \sqrt{80^2 + 105^2 + 2 \cdot 80 \cdot 105 \cdot \cos 75°} \\ &= \sqrt{6.400 + 11.025 + 16.800 \cdot 0{,}26} \\ &= \sqrt{6.400 + 11.025 + 4.368} = \sqrt{21.793} \\ &= 147{,}62 \end{aligned}$$

Jadi, resultan gaya kedua kapal adalah 147,62 *N*.

2. Resultan Tiga Buah Vektor Atau Lebih

Sebuah vektor pada R^2 dapat dijabarkan menjadi vektor komponen berdasarkan sumbu koordinat.

Perhatikan gambar di samping.



Vektor $\vec{A}$ dapat diuraikan menjadi dua macam vektor komponen. Komponen vektor $\vec{A}$ pada sumbu *Y* adalah $\vec{A}_y$ dan komponen vektor $\vec{A}$ pada sumbu *X* adalah $\vec{A}_x$. Selanjutnya, dengan menggunakan perbandingan sinus dan cosinus pada segitiga siku-siku *OAB* diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$\sin\theta = \frac{AB}{OB} = \frac{A_y}{A} \Leftrightarrow \boxed{A_y = A\sin\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{OA}{OB} = \frac{A_x}{A} \Leftrightarrow \boxed{A_x = A\cos\theta}$$

Vektor komponen tersebut dapat kita gunakan untuk mencari besarnya resultan tiga buah vektor atau lebih. Langkah-langkahnya sebagai berikut.

1. Nyatakan sudut yang dibentuk tiap-tiap vektor pada tiap-tiap kuadran menjadi sudut yang besarnya bergantung terhadap sumbu *X*.
2. Jabarkan tiap-tiap vektor sebagai vektor-vektor komponen.
3. Tentukan resultan vektor tiap-tiap komponen.
4. Hitung resultan vektor dari dua komponen.
5. Tentukan besar sudut arah resultan vektor dengan rumus

   $\tan\theta = \frac{R_y}{R_x}$.

Untuk memahami lebih lanjut mengenai langkah-langkah tersebut, perhatikan contoh berikut.

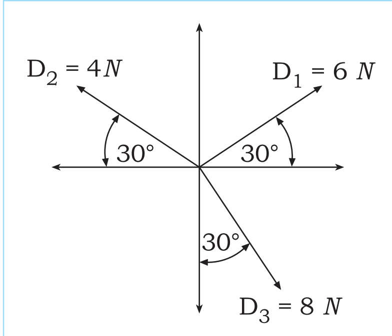
Contoh:

Hitung resultan vektor dari diagram vektor dan tentukan arah resultan vektor tersebut!

Penyelesaian:

Langkah 1:

Besar sudut masing-masing vektor terhadap sumbu X yaitu $\theta_1 = 30°$, $\theta_2 = 30°$, dan $\theta_3 = 90° - 30° = 60°$



Langkah 2:

- Untuk vektor $D_1 = 6\ N$ dan $\theta_1 = 30°$, diperoleh:

  $D_{1_x} = 6 \cdot \cos 30° = 6(\frac{1}{2}\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$

  $D_{1_y} = 6 \cdot \sin 30° = 6\left(\frac{1}{2}\right) = 3$

- Untuk vektor $D_2 = 4\ N$ dan $\theta_2 = 30°$, diperoleh:

  $D_{2_x} = 4 \cdot \cos 30° = 4(\frac{1}{2}\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$

  $D_{2_y} = 4 \cdot \sin 30° = 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2$

- Untuk vektor $D_3 = 8\ N$ dan $\theta_3 = (90° - 30°) = 60°$, diperoleh:

  $D_{3_x} = 8 \cdot \cos 60° = 8((\frac{1}{2})) = 4$

  $D_{3_y} = 8 \cdot \sin 60° = 8(\frac{1}{2}\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}$

Trik

Perhatikan bahwa besarnya sudut harus bergantung terhadap sumbu X.

Langkah 3:

Resultan vektor masing-masing komponen sebagai berikut.

- Komponen sumbu X

  $R_x = D_{1_x} + D_{2_x} + D_{3_x}$

  $= 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 4$

  $= 4 + 5\sqrt{3}$

- Komponen sumbu Y

  $R_y = D_{1_y} + D_{2_y} + D_{3_y}$

  $= 3 + 2 + 4\sqrt{3}$

  $= 5 + 4\sqrt{3}$

Langkah 4:

Resultan vektor kedua komponen dirumuskan dengan:

$$
\begin{aligned}
R &= \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2} = \sqrt{(4+5\sqrt{3})^2 + (5+4\sqrt{3})^2} \\
&= \sqrt{(16 + 2 \cdot 4 \cdot 5\sqrt{3} + 75) + (25 + 2 \cdot 5 \cdot 4\sqrt{3} + 48)} \\
&= \sqrt{91 + 40\sqrt{3} + 73 + 40\sqrt{3}} \\
&= \sqrt{164 + 80\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

Kilas Balik

Ingat kembali menghitung bentuk kuadrat yang telah dipelajari pada kelas X bab 3 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Langkah 5:

Arah resultan vektor dirumuskan dengan:

$$\tan \theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{5+4\sqrt{3}}{4+5\sqrt{3}} = \frac{5+6{,}93}{4+8{,}66} = \frac{11{,}93}{12{,}66} = 0{,}94$$

$\Leftrightarrow \theta = \text{arc } \tan (0{,}94)$

$\Leftrightarrow \theta = 43{,}22°$

Jadi, resultan dari ketiga vektor pada gambar adalah $\sqrt{164 + 80\sqrt{3}}$ dengan arah 43,22°.

F. Phasor

1. Pengertian dan Bentuk Phasor

Phasor adalah vektor yang memiliki titik pangkal dan panjang yang tetap, tetapi memiliki arah yang berubah-ubah. Phasor merupakan kuantitas yang perubahan arahnya bergantung terhadap fungsi waktu. Contoh phasor antara lain: medan magnet dan tegangan yang ditimbulkan oleh arus bolak-balik. Bentuk phasor secara umum dibedakan menjadi dua macam yaitu:

a. **Bentuk koordinat cartesius**, phasor dituliskan sebagai berikut.

$$z = a + b\vec{j}$$

a = bagian real
b = bagian imajiner
$\vec{j}$ = satuan bilangan imajiner ($\vec{j} = \sqrt{-1}$)

b. **Bentuk koordinat kutub**, phasor dituliskan sebagai berikut.

$$z \cdot (r \angle \theta)$$

r = besar/panjang phasor
θ = arah phasor yang ditempuh setelah t detik, dinyatakan dengan $\theta = \omega t$

Phasor dalam bentuk koordinat kutub dapat diubah ke bentuk koordinat cartesius begitu pula sebaliknya.

a. **Mengubah bentuk koordinat cartesius ke bentuk koordinat kutub**

Diketahui $z = a + b\vec{j}$, nilai r dan besarnya θ dapat kita peroleh dengan rumus berikut.

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

b. **Mengubah bentuk koordinat kutub ke bentuk koordinat cartesius**

Diketahui $z = (r \angle \theta)$, nilai a dan b dapat kita peroleh dengan rumus berikut.

$$a = r \cdot \cos\theta$$
$$b = r \cdot \sin\theta$$

Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut.

Contoh:

1. Diberikan phasor $z = 3 - 3\sqrt{3}\,\vec{j}$. Nyatakan phasor tersebut dalam koordinat kutub!

Penyelesaian:

Diketahui $2 = 3 - 3\sqrt{3}\,\vec{j}$, diperoleh $a = 3$ dan $b = -3\sqrt{3}$.

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + (-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 27} = \sqrt{36} = 6$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{-3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \theta = \text{arc } \tan(-\sqrt{3})$$
$$\Leftrightarrow \quad \theta = 300°$$

Jadi, koordinat kutub dari $z = 3 - 3\sqrt{3}\,j$ adalah $z = (6 \angle 300°)$.

Trik

b = komponen y
a = komponen x

Jadi, $\frac{b}{a} = \frac{(-)}{(+)}$ berada di kuadran IV.

2. Nyatakan phasor z = (8, 45°) dalam koordinat cartesius.
Penyelesaian:

Diketahui $z = (8 \angle 45°)$, diperoleh r = 8 dan q = 45°.

$a = r \cos\theta = 8 \cdot \cos 45° = 8 \cdot (\frac{1}{2}\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$

$b = r \cdot \cos\theta = 8 \cdot \cos 45° = 8\,(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$

Jadi, koordinat cartesius dari (8, 45°) adalah $(4\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$.

2. Operasi pada Phasor

Operasi pada phasor dapat dikerjakan apabila phasor berbentuk cartesius. Apabila phasor dalam bentuk koordinat kutub maka diubah ke bentuk cartesius terlebih dahulu.

a. Penjumlahan Phasor

Operasi penjumlahan phasor dikerjakan dengan menjumlahkan tiap-tiap komponen bilangan real dan tiap-tiap komponen bilangan imajiner. Misal diberikan $z_1 = a_1 + b_1\vec{j}$ dan $z_2 = a_2 + b_2\vec{j}$.

Penjumlahan phasor z_1 dan z_2 dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + b_1\vec{j}) + (a_2 + b_2\vec{j}) \\ &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\,\vec{j} \end{aligned}$$

Contoh:

Tentukan hasil penjumlahan $z_1 = 2 + 5\vec{j}$ dan $z_2 = 4 + 5\vec{j}$!

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (2 + 5\vec{j}) + (4 + 5\vec{j}) \\ &= (2 + 4) + (5 + 5)\,\vec{j} \\ &= 6 + 10\,\vec{j} \end{aligned}$$

Apabila dua buah phasor yang dijumlahkan merupakan fungsi terhadap waktu, penjumlahannya merupakan resultan kedua vektor. Diberikan dua buah phasor $E_1 = a_1 \sin \omega t$ dan $E_2 = a_2 \sin(\omega t + \theta)$, maka penjumlahan E_1 dan E_2 dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 \\ &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos\theta}\,\sin(\omega t + \psi) \end{aligned}$$

dengan $\sin\psi = \frac{a_2 \cdot \sin\theta}{E}$

Aplikasi

Diberikan dua buah gaya gerak listrik (ggl) sebagai berikut.

$E_1 = 10 \sin \omega t$

$E_2 = 15 \sin(\omega t + 60)$

Tentukan hasil penjumlahan dua buah ggl tersebut!

Penyelesaian:

Dari soal diperoleh $a_1 = 10$, $a_2 = 15$, dan $\theta = 60°$.

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 \\ &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos\theta}\;\sin(\omega t + \psi) \end{aligned}$$

$= \sqrt{10^2 + 15^2 + 2 \cdot 10 \cdot 15 \cdot \cos 60^o}\ \sin(\omega t + \psi)$

$= \sqrt{100 + 225 + 300\left(\frac{1}{2}\right)}\ \sin(\omega t + \psi)$

$= \sqrt{475}\ \sin(\omega t + \psi)$

$= 21{,}8\ \sin(\omega t + \psi)$

Besar sudut ψ dapat dicari sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \sin \psi &= \frac{a_2 \cdot \sin\theta}{E} \\ &= \frac{15 \cdot \sin 60^o}{21{,}8} \\ &= \frac{15(\frac{1}{2}\sqrt{3})}{21{,}8} \\ &= \frac{15(1{,}732)}{21{,}8} \\ &= 25{,}98 \end{aligned}$$

Jadi, jumlah kedua buah ggl adalah $E = 21{,}8 \sin(\omega t + 36{,}5°)$.

b. Pengurangan Phasor

Operasi pengurangan phasor dikerjakan sama seperti penjumlahan phasor, yaitu mengurangkan tiap-tiap komponen real dan imajiner. Pengurangan phasor z_1 dan z_2 dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (a_1 + b_1 \vec{j}) - (a_2 + b_2 \vec{j}) \\ &= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\vec{j} \end{aligned}$$

Contoh:

Tentukan hasil pengurangan $z_1 = 2 + 3\vec{j}$ dan $z_2 = 5 - \vec{j}$, kemudian nyatakan hasilnya dalam bentuk koordinat kutub!

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (2 + 3\vec{j}) - (5 - \vec{j}) \\ &= (2 - 5) + (3 - (-1))\vec{j} \\ &= -3 + 4\vec{j} \end{aligned}$$

Jadi, hasil pengurangan $z_1 = 2 + 3\vec{j}$ dengan $z_2 = 5 - \vec{j}$ adalah $-3 + 4\vec{j}$.

Diperoleh $a = -3$ dan $b = 4$.

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{4}{-3}$

$\Leftrightarrow \quad \theta = \text{arc}\ \tan\left(\frac{4}{-3}\right)$

$\Leftrightarrow \quad \theta = 270° + 53{,}1°$

$\Leftrightarrow \quad \theta = 323{,}1°$

Jadi, bentuk koordinat kutub dari $z = -3 + 4\vec{j}$ adalah $(5 \angle 323{,}1°)$.

Trik

θ seharusnya berada pada kuadran III. Akan tetapi, karena *tan* pada kuadrat III bernilai positif, maka θ berada pada koordinat II dan IV.

c. Perkalian dan Pembagian Phasor

Operasi perkalian dan pembagian dua buah phasor $z_1 = a_1 + b_1$ dan $z_2 = a_2 + b_2\vec{j}$ diberikan dalam rumus berikut.

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\ \vec{j}$$

dan

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + (-a_1b_2 + a_2b_1)\vec{j}}{{a_2}^2 + {b_2}^2}$$

Pada operasi perkalian dan pembagian phasor, kedua buah phasor tidak harus berbentuk cartesius. Dengan demikian operasi perkalian dan pembagian dapat dikenakan apabila phasor berbentuk koordinat kutub. Misalnya diberikan $z_1 = (r_1 \angle \theta_1)$ dan $z_2 = (r_2 \angle \theta_2)$. Operasi perkalian dan pembagian kedua buah phasor diberikan sebagai berikut.

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1r_2)\ (\theta_1 + \theta_2)$$

dan

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)\theta_1 - \theta_2$$

Contoh:

1. Diberikan dua buah phasor $z_1 = 4 - 3\vec{j}$ dan $z_2 = 5 + 4\vec{j}$. Tentukan hasil operasi berikut!

   a. $z_1 \cdot z_2$

   b. $\dfrac{z_1}{z_2}$

   Penyelesaian:

   $z_1 = 4 - 3\vec{j} \rightarrow a_1 = 4$ dan $b_1 = -3$

   $z_2 = 5 + 4\vec{j} \rightarrow a_2 = 5$ dan $b_2 = 4$

   a. $$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\vec{j} \\ &= (4 \cdot 5 - (-3)4) + (4 \cdot 4 + 5(-3))\vec{j} \\ &= (20 + 12) + (16 - 15)\ \vec{j} \\ &= 32 + \vec{j} \end{aligned}$$

   b. $$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + (-a_1b_2 + a_2b_1)\vec{j}}{{a_2}^2 + {b_2}^2} \\ &= \frac{4 \cdot 6 + (-3)4) + (-4 \cdot 4 + 5(-3))\vec{j}}{(5)^2 + (4)^2} \\ &= \frac{(20 - 12) + (-16 - 15)\vec{j}}{25 + 16} \\ &= \frac{8 - 31\vec{j}}{41} = \frac{8}{41} - \frac{31}{41}\vec{j} \end{aligned}$$

Intisari

Operasi hitung pada phasor akan selalu menghasilkan bentuk $a + b\vec{j}$ atau bentuk phasor itu sendiri.

Latihan 1

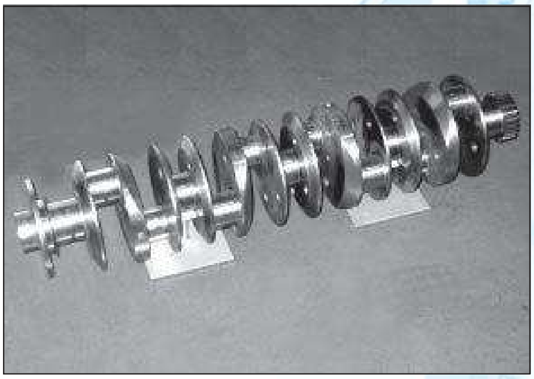
Kerjakan soal-soal berikut!

1. Tentukan besar vektor $\overline{AB}$ jika A (–2, 3) dan B (1, –4)!
2. Tentukan komponen vektor $\overline{AB}$ jika A (5, –2) dan B (7, 2)!
3. Tentukan vektor satuan dari vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$!
4. Diketahui $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Tentukan $(3 \cdot \vec{b}) - (\frac{1}{2} \cdot \vec{a})$!
5. Jika $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$, tentukan $2 \cdot \vec{a} - \frac{1}{2} \cdot \vec{b}$!
6. Jika $\vec{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ dan $\vec{q} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, tentukan $\frac{1}{2} \cdot \vec{p} - \frac{1}{2} \cdot \vec{q}$!
7. Jika diketahui $\vec{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ dan $\vec{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, tentukan x dan y jika $\vec{p} + \vec{q} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$!
8. Jika $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \end{pmatrix}$, tentukan a_1 dan a_2 jika $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$!
9. Jika diketahui $\vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$, tentukan hasil operasi vektor:
   a. modulus vektor $\vec{d}$,
   b. vektor negatif $\vec{d}$, dan
   c. vektor satuan $\vec{d}$.
10. Diketahui $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}$ dan $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$, nyatakan secara aljabar bentuk vektor-vektor berikut!
    a. $\vec{u} + \vec{v}$
    b. $2\vec{u} + \vec{v}$
    c. $3\vec{u} - 2\vec{v}$
    d. $3\vec{u} + 3\vec{v}$
    e. $3(\vec{u} + \vec{v})$

Kegiatan Belajar 2

Vektor pada Bangun Ruang

Roda pada sebuah kendaraan bermotor dapat bergerak akibat adanya tenaga yang dihasilkan oleh gerakan batang torak yang diubah menjadi gerak putaran pada poros engkol. Poros engkol menerima pasokan beban yang besar dari torak dan batang torak sekaligus berputar pada kecepatan tinggi. Dengan demikian poros engkol harus terbuat dari bahan yang memiliki daya tahan tinggi, yaitu baja *carbon*. Pada poros engkol *crank pin* bergerak secara memutar. Apabila pada posisi di atas, piston bergerak ke atas, begitu pula sebaliknya. Gerakan memutar dari *crank pin* merupakan gerak pada ruang dimensi tiga yang dapat dijabarkan ke dalam bentuk vektor dimensi tiga. Lebih lanjut mengenai vektor dimensi tiga akan kita pelajari pada uraian berikut.



Sumber: *www.abltechnology.com*

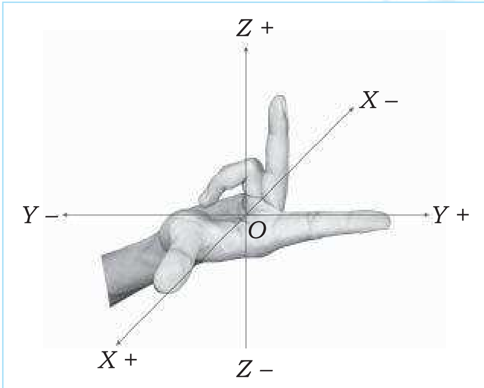
Gambar poros engkol

Uraian Materi

A. Vektor pada Ruang (Dimensi 3)

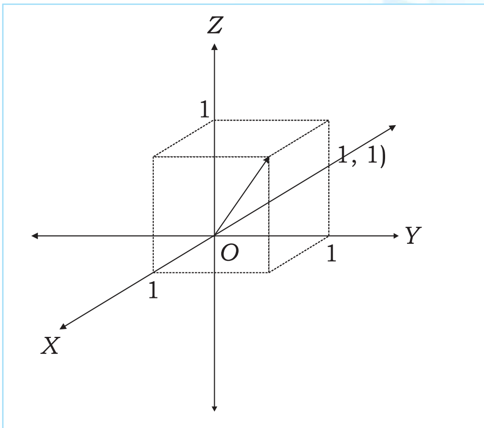
Vektor pada ruang adalah vektor yang terletak di dalam ruang dimensi 3. Ruang ini dibentuk oleh 3 sumbu yaitu sumbu X, sumbu Y, dan sumbu Z.

Ketiga sumbu ini berpotongan tegak lurus. Hasil perpotongan ini adalah O. Selanjutnya, titik O disebut sebagai sumbu pusat. Perhatikan gambar kaidah jari tangan kanan di samping. Kaidah ini menerangkan beberapa hal, yaitu:



1. Jari telunjuk menunjukkan sumbu Y. Bilangan-bilangan yang terletak setelah O dan searah telunjuk merupakan bilangan positif. Arah dan letak sebaliknya berarti bilangan negatif.
2. Ibu jari menunjukkan sumbu X. Bilangan yang searah ibu jari dan terletak setelah O merupakan bilangan positif. Arah dan letak sebaliknya merupakan bilangan negatif.
3. Jari tengah menunjukkan sumbu Z. Bilangan yang searah jari tengah dan terletak setelah O merupakan bilangan positif. Arah dan letak sebaliknya merupakan bilangan negatif.

Perhatikan contoh gambar vektor ruang di samping.



Vektor $\overrightarrow{OB}$ di samping merupakan vektor ruang dengan pangkal O (0, 0, 0) dan ujung B (1, 1, 1). Vektor $\overrightarrow{OB}$ ini dapat ditulis menjadi:

$\overrightarrow{OB}$ = (1, 1, 1)

Vektor ruang dapat pula ditulis dalam satuan $\vec{i}$, $\vec{j}$, dan $\vec{k}$. Satuan $\vec{i}$ sesuai dengan sumbu X, satuan $\vec{j}$ sesuai dengan sumbu Y, dan satuan $\vec{k}$ sesuai dengan sumbu Z.

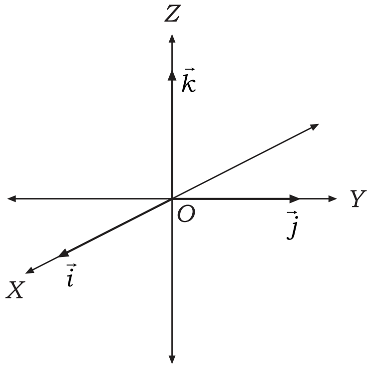
$\overrightarrow{OB}$ = (1, 1, 1) dapat ditulis menjadi $1\vec{i} + 1\vec{j} + 1\vec{k} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

B. Ruang Lingkup Vektor

Ruang lingkup vektor dimensi tiga meliputi:

1. Vektor Posisi

Vektor posisi titik P adalah vektor $\overline{OP}$ yaitu vektor yang berpangkal di titik $O(0, 0, 0)$ dan berujung di titik $P(x, y, z)$. Secara aljabar vektor $\overline{OP}$ dapat ditulis sebagai berikut.



$$\overline{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ atau } \overline{OP} = (x, y, z)$$

Vektor $\overline{OP} = (x, y, z)$ pada dimensi tiga dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor satuan $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sebagai berikut.

$$\overline{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

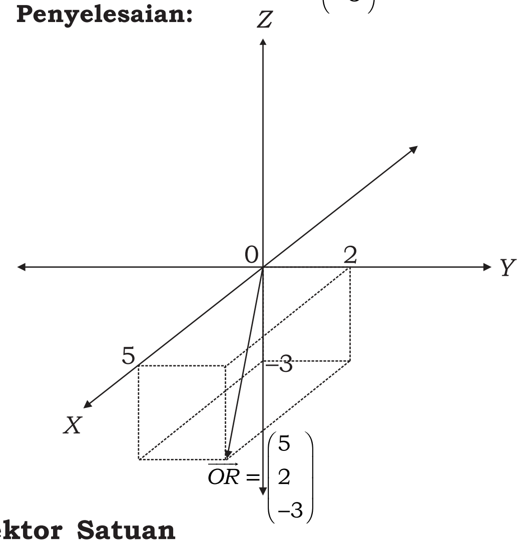
Sebuah vektor $\overline{AB}$ dengan koordinat titik pangkal $A(x_1, y_1, z_1)$ dan koordinat titik ujung $B(x_2, y_2, z_2)$ memiliki vektor posisi sebagai berikut.

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

Contoh:

1. Gambarkan vektor $\overline{OR} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ pada dimensi tiga!

Penyelesaian:



2. Vektor Satuan

Vektor satuan adalah vektor yang mempunyai panjang 1 satuan. Vektor satuan dari vektor $\vec{a}$ didefinisikan vektor $\vec{a}$ dibagi dengan besar vektor $\vec{a}$ sendiri, yang dirumuskan dengan: $\vec{e} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

Contoh:

Tentukan vektor satuan dari vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$!

Penyelesaian:

Terlebih dahulu ditentukan panjang vektor $\vec{a}$.

$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{25} = 5$ Jadi, vektor satuan vektor $\vec{a}$ adalah

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

Selain vektor satuan terdapat vektor-vektor satuan yang sejajar dengan sumbu-sumbu koordinat antara lain sebagai berikut.

a. Vektor satuan yang sejajar dengan sumbu X dinotasikan $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b. Vektor satuan yang sejajar dengan sumbu Y dinotasikan $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c. Vektor satuan yang sejajar dengan sumbu Z dinotasikan $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Modulus Vektor

Modulus vektor adalah besar atau panjang suatu vektor. Panjang vektor

$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dirumuskan sebagai berikut.

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Jika diketahui vektor $\overrightarrow{AB}$ dengan koordinat titik A (x_1, y_1, z_1) dan B (x_2, y_2, z_2) maka **modulus/besar/panjang** vektor $\overrightarrow{AB}$ dapat dinyatakan sebagai **jarak** antara titik A dan B yaitu:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Jika vektor $\vec{a}$ disajikan dalam bentuk linear $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ maka modulus vektor $\vec{a}$ adalah $|\vec{a}| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}$

Contoh:

Tentukan modulus/besar vektor berikut!

a. $\overrightarrow{AB}$, dengan titik A (1, 4, 6) dan B (3, 7, 9)

b. $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$

Penyelesaian:

a. Diketahui $A = \begin{pmatrix}1\\4\\6\end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix}3\\7\\9\end{pmatrix}$, maka $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}3\\7\\9\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\4\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3-1\\7-4\\9-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$

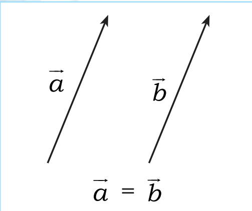
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(3-1)^2 + (7-4)^2 + (9-6)^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{22}$$

Jadi, modulus vektor $\overrightarrow{AB}$ adalah $\sqrt{22}$.

b. $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

Jadi, modulus vektor $\vec{a}$ adalah $\sqrt{14}$.

4. Kesamaan Vektor



Dua buah vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ dikatakan sama apabila keduanya mempunyai besar dan arah yang sama. Perhatikan gambar di samping. Terlihat $\boldsymbol{a}$ sejajar $\boldsymbol{b}$ dan sama panjang. Dengan demikian $\vec{a} = \vec{b}$.

Misal:

$\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ atau $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, dan $\vec{b} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ atau $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$

$\vec{a} = \vec{b}$ jika dan hanya jika $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$

Contoh:

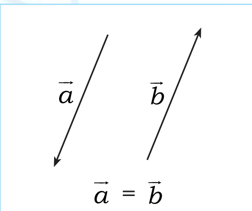
Diberikan dua buah vektor $\vec{m} = \begin{pmatrix}3\\a\\-1\end{pmatrix}$ = dan $\vec{n} = \begin{pmatrix}6\\-3\\-c\end{pmatrix}$.

Tentukan nilai a, b, c agar dipenuhi $\vec{m} = \vec{n}$!

Penyelesaian:

Syarat vektor $\vec{m} = \vec{n}$ adalah $m_1 = n_1$, $m_2 = n_2$ dan $m_3 = n_3$. Dari yang diketahui diperoleh $3 = b$, $a = -3$, dan $-1 = -c$. Jadi, agar dipenuhi $\vec{m} = \vec{n}$ maka nilai $a = -3$, $b = 3$, dan $c = 1$.

5. Vektor Negatif



Vektor negatif dari $\boldsymbol{a}$ adalah vektor yang besarnya sama dengan vektor $\boldsymbol{a}$ tetapi arahnya berlawanan dan ditulis $-\boldsymbol{a}$. Perhatikan gambar di samping. $\boldsymbol{a}$ sejajar dan sama panjang $\boldsymbol{b}$, artinya karena antara $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{b}$ berlawanan arah maka $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{b}$.

Contoh:

$\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ atau $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$

$\vec{b} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ atau $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$

$\vec{a} = -\vec{b}$ jika dan hanya jika $a_1 = -b_1$, $a_2 = -b_2$, $a_3 = -b_3$

Contoh:

Diberikan dua buah vektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2-a \\ 4 \\ -b+1 \end{pmatrix}$ dan $\vec{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ c-2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Tentukan nilai a, b, dan c agar persamaan $r + s = 0$.

Penyelesaian:

Akan ditunjukkan $\vec{r} + \vec{s} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2-a \\ 4 \\ -b+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ c-2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow\ & 2 - a - 1 = 0 \ \rightarrow\ a = 1 \\ & 4 + c - 2 = 0 \ \rightarrow\ c = -2 \\ & -b + 1 + 3 = 0 \rightarrow\ b = 4 \end{aligned}$$

Jadi, agar dipenuhi $r + s = 0$ maka nilai $a = 1$, $b = 4$, dan $c = -2$.

6. Vektor Nol

Vektor nol adalah vektor yang besar/panjangnya nol satuan dan arahnya tak tentu (berupa titik).

Vektor nol pada dimensi 3 dilambangkan dengan O (0 , 0 , 0) atau $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

C. Operasi Hitung Vektor di R^3

1. Penjumlahan Vektor dalam Ruang

a. Jika dua vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ dan vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ adalah vektor-vektor tidak nol di R^3 maka operasi penjumlahannya didefinisikan sebagai berikut.

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

b. Jika vektor $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ dan vektor $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ maka operasi penjumlahannya didefinisikan sebagai berikut.

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j} + (a_3 + b_3)\vec{k}$$

Contoh:

Hitunglah jumlah dari dua buah vektor berikut!

a. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

b. $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ dan $\vec{b} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$

Penyelesaian:

a. $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+(-1) \\ -3+4 \\ 5+(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

b. $\vec{a} + \vec{b} = (2+3)\vec{i} + (1+5)\vec{j} + (-4+1)\vec{k}$

$= 5\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}$

2. Selisih Dua Vektor pada R^3

a. Jika dua vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ dan vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ maka operasi pengurangan kedua vektor didefinisikan sebagai berikut.

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

b. Jika vektor $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ dan vektor $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ maka operasi pengurangan kedua vektor didefinisikan sebagai berikut.

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1)\vec{i} + (a_2 - b_2)\vec{j} + (a_3 - b_3)\vec{k}$$

Contoh:

Hitunglah $\vec{a} - \vec{b}$ jika:

a. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b. $\vec{a} = 8\vec{i} + 6\vec{j} + 9\vec{k}$ dan $\vec{b} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}$

Penyelesaian:

a. $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 8-3 \\ 6-1 \\ 7-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

b. $\vec{a} - \vec{b} = (8-3)\,\vec{i} + (6-5)\,\vec{j} + (9-2)\,\vec{k} = 5\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k}$

3. Perkalian Skalar dengan Vektor

a. Hasil kali vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ dengan suatu skalar c didefinisikan sebagai berikut.

$$c \,.\, \vec{a} = \begin{pmatrix} c \cdot a_1 \\ c \cdot a_2 \\ c \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

b. Hasil kali vektor $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ dengan skalar c didefinisikan sebagai berikut.

$$c \,.\, \vec{a} = c \cdot a_1\vec{i} + c \cdot a_2\vec{j} + c \cdot a_3\vec{k}$$

Contoh:

1. Diberikan vektor $\vec{h} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ maka $3 \,.\, \vec{h} = \begin{pmatrix} 3 \times 5 \\ 3 \times 2 \\ 3 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}$

2. Diberikan vektor $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, maka $4 \cdot \vec{u} = 4 \cdot 2\vec{i} + 4 \cdot \vec{j} - 4 \cdot 3\vec{k}$
$= 8\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k}$

4. Perkalian Dua Vektor di R^3

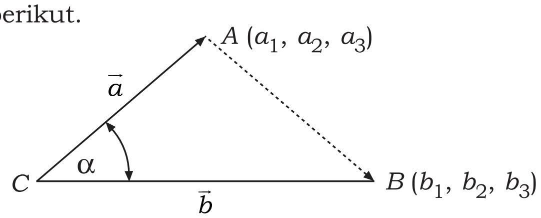
Perkalian vektor di R^3 dibedakan menjadi dua macam sebagai berikut.

a. Perkalian Skalar Dua Vektor (*Dot Product*)

Yang dimaksud perkalian skalar dua vektor adalah perkalian vektor dengan vektor yang menghasilkan skalar. Jika diberikan vektor $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ dan vektor $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ maka perkalian skalar dua vektor dapat ditulis dengan : $\vec{a} \cdot \vec{b}$ (dibaca: $\vec{a}$ dot $\vec{b}$) dan dirumuskan sebagai berikut.

1. Jika sudut antara vektor $\vec{a}$ dan vektor $\vec{b}$ diketahui sama dengan α ($0° \le \alpha \le 180°$), maka:
   $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$, dengan α adalah sudut antara vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$.
2. Jika sudut antara vektor $\vec{a}$ dan vektor $\vec{b}$ tidak diketahui maka:
   $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \cdot b_1) + (a_2 \cdot b_2) + (a_3 \cdot b_3)$

Hal ini dapat kita pahami dengan aturan cosinus dan rumus jarak sebagai berikut.



$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2|\overline{OA}||\overline{OB}|\cos\alpha$$

$$= \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha \qquad \ldots (1)$$

Dengan rumus jarak dua titik diperoleh:

$$\overline{AB}^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2$$

$$= \left(b_1^2 - 2b_1a_1 + a_1^2\right) + \left(b_2^2 - 2b_2a_2 + a_2^2\right) + \left(b_3^2 - 2b_3a_3 + a_3^2\right)$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2a_1b_1 - 2a_2b_2 - 2a_3b_3$$

$$= a^2 + b^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \qquad \ldots (2)$$

Dari (1) dan (2) diperoleh persamaan:

$$\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha = a^2 + b^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)$$

$$\Leftrightarrow \qquad |\vec{a}| + |\vec{b}|\cos\alpha = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)$$

Menurut rumus definisi $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|\cos\alpha$, diperoleh:

$$\boldsymbol{\vec{a}} \cdot \boldsymbol{\vec{b}} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Contoh:

1. Diberikan vektor $\vec{u} = 2i + j - 3k$ dan $= 3i - 4j + 7k$.
   Diperoleh $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-4) + (-3) \cdot 7$
   $= -19$

Perlu Tahu

Sifat-sifat perkalian skalar: untuk setiap vektor $\vec{a}$, $\vec{b}$, dan $\vec{c}$ berlaku:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2. $\vec{a}\,(\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) + (\vec{a} \cdot \vec{c})$

2. Jika diketahui $|\vec{a}| = 6$ dan $|\vec{b}| = 5$ dan sudut antara vektor $\vec{a}$ dan vektor $\vec{b}$ adalah 60° maka perkaliannya adalah:

$$\begin{aligned}\vec{a}\ .\ \vec{b} &= |\vec{a}|.|\vec{b}|\ .\ \cos\alpha\\ &= 6\ .\ 5\ .\ \cos 60°\\ &= 30\ .\ \tfrac{1}{2} = 15\end{aligned}$$

b. Perkalian Vektor dari Dua Vektor

Yang dimaksud perkalian vektor dari dua vektor adalah perkalian yang menghasilkan vektor. Perkalian vektor dua vektor ditulis dengan $\vec{a} \times \vec{b}$ (dibaca a *cross* $\vec{b}$) dirumuskan dengan determinan matriks sebagai berikut.

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

dengan aturan *Sarrus* akan diperoleh hasil perkalian sebagai berikut.

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}\begin{matrix} i & j\\ a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{matrix}$$

$$-\quad -\quad -\quad +\quad +\quad +$$

$$= \boldsymbol{(a_2b_3 - a_3b_2)\,\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\vec{k}}$$

Contoh:

Diketahui vektor $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ dan vektor $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$. Tentukanlah hasil operasi vektor berikut!

a. $\vec{a} \times \vec{b}$ b. $\vec{b} \times \vec{a}$ c. $|\vec{a} \times \vec{b}|$

Penyelesaian:

a. $$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix} -1 & 3\\ -2 & 1\end{vmatrix}\cdot\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}\cdot\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1\\ 3 & -2\end{vmatrix}\cdot\vec{k}\\ &= (-1-(-6))\ .\ \vec{i}\ - (2-9)\ .\ \vec{j}\ + (-4-(-3))\ .\ \vec{k}\ = 5i + 7j - \vec{k}\end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned}\vec{b} \times \vec{a} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix} -2 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}\cdot\vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}\cdot\vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}\cdot\vec{k}\\ &= (-6-(-1)).\ \vec{i}\ - (9-2).\ \vec{j}\ + (-3-(-4)).\ \vec{k}\\ &= -5\vec{i} - 7\vec{j} + \vec{k}\end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned}|\vec{a}\times\vec{b}| &= \sqrt{5^2 + 7^2 + (-1)^2}\\ &= \sqrt{25 + 49 + 1} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}\end{aligned}$$

5. Sudut Antara Dua Vektor

Berdasarkan rumus perkalian skalar dua vektor $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\alpha$ maka besar sudut antara vektor $\vec{a}$ dan vektor $\vec{b}$ dapat ditentukan, yaitu:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

Contoh:

Jika vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ dan vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, nyatakan vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ sebagai kombinasi linear vektor satuan $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Kemudian carilah sudut antara keduanya!

Penyelesaian:

$\vec{a} = \vec{i}$

$\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

$$= \frac{1\cdot 1+0\cdot 1+0\cdot 0}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Diperoleh:

$$\alpha = \text{arc}\ .\ \cos\frac{1}{2}\sqrt{2}$$
$$= 45°$$

Intisari

Besar sudut antara vektor $\vec{a}$ dan vektor $\vec{b}$ adalah:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\ |\vec{b}|}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \text{arc}\ \cos\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\ |\vec{b}|}\right)$$

6. Vektor Tegak Lurus

Dua buah vektor pada R^3 mempunyai posisi saling tegak lurus apabila sudut yang dibentuk oleh kedua vektor besarnya 90°. Dengan demikian hasil *dot product* kedua vektor sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\alpha\\ &= |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos 90°\\ &= |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,0\\ &= 0\end{aligned}$$

Dengan demikian, dapat disimpulkan sebagai berikut.
Dua buah vektor tegak lurus apabila hasil *dot product* kedua vektor bernilai nol.

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\\ &= 0\end{aligned}$$

Contoh:

1. Tunjukkan bahwa vektor $\vec{k} = \begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}$ dan $\vec{l} = \begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}$ saling tegak lurus!

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\vec{k}\cdot\vec{l} &= k_1\, l_1 + k_2\, l_2 + k_3\, l_3\\ &= 3\,.\,2 + 4(-2) + 1\,.\,2\\ &= 6 + (-8) + 2\\ &= 0\end{aligned}$$

Hasil *dot product* vektor $\vec{k}$ dan $\vec{l}$ adalah 0. Dengan demikian terbukti bahwa vektor $\vec{k}$ tegak lurus dengan vektor $\vec{l}$.

2. Diberikan dua buah vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2+p \\ -3 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   Tentukan nilai p agar vektor $\vec{a}$ tegak lurus $\vec{b}$!

   Penyelesaian:

   Vektor $\vec{a}$ tegak lurus $\vec{b}$ apabila dipenuhi persamaan berikut.

$$\begin{aligned} \vec{a}\cdot\vec{b} &= 0\\ \Leftrightarrow\quad (a_1\, b_1) + (a_2\, b_2) + (a_3\, b_3) &= 0\\ \Leftrightarrow\quad (7\,.\,3) + (2+p)\,3 + (-3)\,2 &= 0\\ \Leftrightarrow\quad 21 + 6 + 3p - 6 &= 0\\ \Leftrightarrow\quad 3p + 21 &= 0\\ \Leftrightarrow\quad 3p &= -21\\ \Leftrightarrow\quad p &= -7\end{aligned}$$

   Jadi, vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ saling tegak lurus apabila nilai $p = -7$.

Trik

Perkalian dua vektor dikerjakan dengan cara mengalikan vektor-vektor yang sekomponen (komponen $\vec{i}$, $\vec{j}$, atau $\vec{k}$).

Latihan 2

Kerjakan soal-soal berikut!

1. Diketahui vektor-vektor $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$; $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ dan $\vec{w} = 2\vec{i} - \vec{k}$.
   Tentukan hasil operasi vektor berikut!

   a. $\vec{u}\cdot\vec{v}$ c. $\vec{v}\times\vec{u}$ e. $|\vec{u}|$

   b. $\vec{u}+\vec{w}$ d. $3\vec{w}+2\vec{v}$ f. $|\vec{v}\vec{w}|$

2. Diketahui vektor $(\overline{PQ})$ dengan titik P (2, 5, –4) dan Q (1, 0, –3). Tentukan hasil di bawah ini!

   a. Koordinat titik R jika $\overline{SR}$ sama dengan vektor $(\overline{PQ})$ dan titik S (2, –2, 4).

   b. Koordinat titik N jika $\overline{MN}$ merupakan negatif vektor $(\overline{PQ})$ dan titik M (–1, 3, 2).

3. Tentukan vektor satuan dari vektor-vektor berikut!

   a. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

   b. $\overline{MN}$ dengan M (2, 1, 2) dan N (2, 0, 3)

4. Diketahui titik-titik di R^3 masing-masing $A(3, 5, 7)$, $B(8, 6, 1)$, $C(7, 11, -5)$, dan $D(2, 10, 1)$. Nyatakan vektor-vektor berikut sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor satuan $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$!

   a. $\overline{AB}$ c. $\overline{BC}$

   b. $\overline{AD}$ d. $\overline{DC}$

5. Jika $\vec{p} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ dan $\vec{q} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, tentukan besar sudut yang terbentuk oleh kedua vektor tersebut!

6. Carilah luas segitiga ABC jika diketahui titik $A(2, -3, 1)$; $B(1, -1, 2)$, dan $C(-1, 2, 3)$!

Rangkuman

1. Vektor adalah besaran yang mempunyai besar dan arah.
2. Modulus vektor adalah besar atau panjang vektor.
3. Modulus/besar/panjang vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ adalah $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.
4. Vektor posisi titik $P(x, y)$ adalah $\overline{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
5. Dua vektor sama bila besar dan arahnya sama.
6. Vektor yang besarnya sama dengan vektor $\vec{a}$ tetapi arahnya berlawanan disebut vektor negatif dari a dituliskan $-\vec{a}$.
7. Vektor nol adalah vektor yang besarnya nol dan arahnya tak tentu.
8. Vektor satuan dari vektor $\vec{a}$ dirumuskan $\vec{a} = \frac{a}{|a|}$.
9. Pada bangun bidang datar, jika diketahui vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ dan vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, maka:

   a. Perkalian vektor $\vec{a}$ dengan skalar k adalah $k \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \end{pmatrix}$.

   b. Penjumlahan vektor $\vec{a}$ dan vektor $\vec{b}$ adalah $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$.

   c. Selisih pengurangan vektor $\vec{a}$ dan vektor $\vec{b}$ adalah $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$.

10. Modulus/besar/panjang vektor atau $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ adalah $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.
11. Vektor satuan dari vektor $\vec{a}$ adalah $\vec{e} = \frac{a}{|a|}$.